Рецензия на статью М. И. Тельпиза “NP-полнота, суперприведение и проблема четырех красок”

Рецензируемая работа посвящена построению алгоритмов (или, как их иногда называют в данном контексте, *эвристик*) для решения NP-полной задачи “ВЫПОЛНИМОСТЬ”, т.е. поиску назначений, выполняющих данную пропозициональную формулу. Большое число известных эвристик такого рода основано на той или иной пропозициональной системе доказательств (очень хорошее популярное введение в последний предмет со списком литературы для дальнейшего чтения может быть найдено в [1]) и устроены следующим образом.

Пусть имеется КНФ формула, состоящая из семейств клашей (т.е. дизъюнкций литералов) $C_1(x_1,\dots,x_n),\dots,C_m(x_1,\dots,x_n)$. Мы хотим узнать выполнима ли эта формула и, если да, построить для нее выполняющее назначение. Для этой цели фиксируется некоторый класс пропозициональных формул $\mathcal{C}$, включающий в себя, в частности, все клаши и некоторый набор *правил вывода*, позволяющий из формул $F_1,\dots,F_r \in \mathcal{C}$ вывести новую формулу $F \in \mathcal{C}$ с тем свойством, что всякий выполняющий набор для $F_1,\dots,F_r$ также выполняет F. Предполагается, что эта система доказательств *полна*, т.е. если система клашей $\{C_1,\dots,C_m\}$ невыполнима, то из нее выводится противоречие. Алгоритм, основанный на такой системе доказательств, последовательно выводит из $\{C_1,\dots,C_m\}$ новые формулы из класса $\mathcal{C}$, определяя в соответствии с собственными внутренними предпочтениями какое именно правило вывода применять на каждом шаге (набор этих предпочтений и называется эвристикой). Если алгоритму удается вывести противоречие, он останавливается и исходная формула объявляется невыполнимой. В противном случае в какой-то момент накопленной информации оказывается достаточно, чтобы “считать” с нее выполняющее назначение, и на этом работа алгоритма также прекращается.

Настоящая статья целиком укладывается в эту распространенную схему. При этом автор использует свою собственную систему обозначений, называемую им *принципом позиционности*. Хотя у меня имеются серьезные сомнения в продуктивности этой системы, к чести автора следует отметить, что им не было предпринято попыток специально затемнить существо дела, и перевод его обозначений на общепринятый язык проводится в-общем без особых затруднений. Описанная автором пропозициональная система доказательств в системе Q_3 – не что иное, как классическая система *резолюций* (см., например, вышеупомянутый обзор [1]). Ее расширение (в авторских обозначениях – система Q_2) оперирует с формулами несколько более общего вида

$$(((x_{i_1}^{\epsilon_1} \circ x_{i_2}^{\epsilon_2}) \circ x_{i_3}^{\epsilon_3}) \ldots) \circ x_{i_w}^{\epsilon_w},$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_w$, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_w \in \{0, 1\}$, $x^1 \equiv x$, $x^0 \equiv (\neg x)$ и всякая $\circ$ – одна из двух операций $\{\wedge, \vee\}$. Используемое в этой системе правило вывода называется автором *коньюнктивной резолюцией*; оно достаточно подробно описано в §4.

Основной (и единственный) содержательный математический результат данной работы состоит в том, что некоторая эвристика, основанная на такой пропозициональной системе доказательств работает за полиномиальное время, из чего непосредственно вытекает $P = NP$. В отличие от пропозициональной системы и правила вывода, описание самой эвристики (т.е., инструкций, в соответствии с которыми алгоритм определяет какое именно правило выода применять в каждый конкретный момент времени) является весьма приблизительным и туманным. При этом именно в тех местах, когда детали алгоритма приобретают особое значение для понимания его работы, изложение становится наиболее загадочным. В качестве особо яркого примера я могу отметить §7.4: как именно проводится то, что автор называет "сегментацией" – это один из наиболее тонких и ключевых моментов в понимании всего алгоритма, и понять, как именно это делается, из текста не представляется возможным.

Впрочем, все эти детали не слишком важны, так как из известных в теории сложности доказательств результатов вытекает существование конкретных невыполнимых КНФ, для которых *вообще никакая* эвристика, основанная на системе Q_2, не в состоянии вывести противоречие за полиномиальное время. Для системы Q_3 (т.е. резолюций) – это классический результат, впервые доказанный в [2]. Система Q_2, насколько мне известно, никем специально ранее не рассматривалась. Однако практически любые современные методы доказательства сложности вывода противоречия в системе резолюций легко обобщаются на систему Q_2. Просмотрев имеющуюся литературу, я могу, например, порекомендовать ознакомиться с доказательством экспоненциальной нижней оценки для случайных КНФ из [3, §4], обобщение которого на систему Q_2 получается особенно естественно и просто.

Я не берусь судить насколько предлагаемые автором алгоритмы интересны с более прикладных точек зрения. Однако доказательство основного (и единственного) математического результата в рецензируемой работе в силу вышеприведенных причин ошибочно, и это делает ее опубликование в журнале строго математического профиля невозможным.

А.А. Разборов

Список литературы

[1] P. Beame and T. Pitassi. Propositional proof complexity: Past, present and future. Technical Report TR98-067, Electronic Colloquium on Computational Complexity, 1998. Available at ftp://ftp.eccc.uni-trier.de/pub/eccc/reports/1998/TR98-067/index.html.

[2] A. Haken. The intractability or resolution. *Theoretical Computer Science*, 39:297–308, 1985.

[3] P. Beame and T. Pitassi. Simplified and improved resolution lower bounds. In *Proceedings of the 37th IEEE FOCS*, pages 274–282, 1996. Also available at http://www.cs.washington.edu/homes/beame/papers/clause.ps.